A.A. 2020/21

CORSO DI ANALISI MATEMATICA 1

PER I CORSI DI LAUREA IN MATEMATICA E FISICA

I° semestre, 12 crediti

Prof. Giuseppe Marino

COMMISSIONE D'ESAME

Presidente: Giuseppe MARINO
Membri: Luigi Muglia, Vittorio Colao, Filomena Cianciaruso, Gennaro Infante

MODALITA' E DATE DEGLI ESAMI

In conformità al Calendario Accademico del Dipartimento di Matematica e Informatica, e al Calendario Accademico del Dipartimento di Fisica, ci saranno 5 appelli d'esame, 2 appelli ordinari fra Gennaio e Febbraio e 3 appelli di recupero, ordinariamente a Giugno, Luglio e Settembre

Ci saranno inoltre due Sessioni Straordinarie riservate solo agli studenti fuori corso: La prima a Ottobre-Novembre e la seconda a Marzo-Aprile.
APPENA POSSIBILE SCRIVERO' QUI LE DATE PRECISE.

VADEMECUM PER SOSTENERE BENE L'ESAME SCRITTO QUALORA SI FACCIA IN PRESENZA:

1. VENIRE MUNITI DI UN NUMERO CONSIDEREVOLE DI FOGLI DI PROTOCOLLO A QUADRETTI.
2. VENIRE MUNITI DI UN PAIO DI PENNE.
3. ANDARE AL BAGNO PRIMA CHE COMINCI LA PROVA SCRITTA. CHI HA BISOGNO DI ANDARE AL BAGNO OGNI ORA DEVE MUNIRSI DI APPOSTITO CERTIFICATO MEDICO.
4. LA PROVA SCRITTA E' DIVERSA PER OGNI STUDENTE.

PRESENTARSI PER CERCARE DI COPIARE FA SOLO PERDERE TEMPO A CHI LO FA E A ME
(E QUEST'ULTIMA COSA E' MOLTO FASTIDIOSA!!!)

5. L'orale si sosterrà, di norma, il pomeriggio dello stesso giorno in cui in mattinata si è sostenuta la prova scritta o al più il giorno successivo.
6. Chi non ha superato la prova scritta potrà prendere visione del compito alla fine dello svolgimento degli orali, non prima né dopo. Il giorno dopo i compiti verranno cestinati.

VADEMECUM PER SOSTENERE BENE L'ESAME SCRITTO QUALORA SI FACCIA DA REMOTO:

IL COMPITO SCRITTO SARA' COMPOSTO DA DOMANDE A RISPOSTA CHIUSA (QUANTE? LO VEDREMO SUCCESSIVAMENTE)

L'orale si sosterrà, di norma, il pomeriggio dello stesso giorno in cui in mattinata si è sostenuta la prova scritta.

NON E' POSSIBILE CONSERVARE LA PROVA SCRITTA DA UN APPELLO ALL'ALTRO.

Per poter sostenere gli esami e' obbligatoria la prenotazione col sistema di registrazione ESSE3

Gli esami saranno costituiti da una prova scritta seguita da una orale.
La prova scritta è superata se si ottiene un voto maggiore o uguale a 18 trentesimi.

PROVA SCRITTA

Considero molto importante una giusta autovalutazione. Così, SOLO PER LA PRIMA VOLTA CHE UNO STUDENTE AFFRONTA LA PROVA SCRITTA E LA SUPERA, OTTIENE UN BONUS DI 2 PUNTI (ATTENZIONE, LEGGERE BENE: PER AVERE IL BONUS DI DUE PUNTI LA PROVA SCRITTA DEV'ESSERE SUPERATA, OSSIA LO STUDENTE DEVE AVER CONSEGUITO ALMENO 18 SENZA IL BONUS!!!)

LO STUDENTE CHE NON SUPERA LA PROVA SCRITTA LA PRIMA VOLTA CHE SI PRESENTA, PERDE IL BONUS.

IL BONUS E' UN PREMIO PER CHI SA AUTOVALUTARSI.

La prova scritta IN PRESENZA è costituita da 8 esercizi:

- **Esercizio 1: Un esercizio di geometria analitica o di disequazioni (max 3 punti)**
- **Esercizio 2: Un limite, o di successione o di funzione (max 3 punti)**
- **Esercizio 3: Studio di una funzione (max 9 punti)**
- **Esercizio 4: Calcolo di un'area o di un volume di rotazione (max 3 punti)**
- **Esercizio 5: Studio del carattere di una serie numerica (max 3 punti)**
- **Esercizio 6: Un problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo o del secondo ordine (max 3 punti)**
- **Esercizio 7: Ricerca di punti di max e min per una funzione di due variabili (max 3 punti)**
- **Esercizio 8: Un problema di variazioni collegate (max 3 punti)**

PROVA ORALE

Nella prova orale lo studente sarà invitato ad esporre due teoremi **estratti a sorte** dalla Commissione, uno della prima parte del corso e uno della seconda parte. A partire da tali risultati faranno seguito le domande della commissione.

L'esame e' strutturato in modo che uno studente che ha seguito il corso e studiato regolarmente cogliendo il significato dei concetti e dei risultati esposti, lo possa superare senza difficoltà.

…….

ELENCO DEI TEOREMI CHE VERRANNO ESTRATTI NELL'ESAME ORALE RIGUARDANTI LA PRIMA PARTE DEL CORSO

(prime 140 pagine del libro di testo + gli argomenti che non sono sul libro di testo ma sono stati esposti a lezione).

- **Teorema 1. Caratterizzazione del supA**
- **Teorema 2: Equivalenza fra l'AX di Completezza e l'AX del sup.**
- **Teorema 3. Le classi di equivalenza di due elementi equivalenti coincidono**
- **Teorema 4. Le classi di equivalenza di due elementi non equivalenti sono disgiunte.**
- **Teorema 5. Teorema fondamentale sulle relazioni di equivalenza.**
- **Teorema 6: Caratterizzazione delle classi di congruenza mod p come classi di resti della divisione per p.**
- **Teorema 7. La somma e il prodotto di classi di congruenza non dipendono dai rappresentanti.**

- **Teorema 8. La relazione di equipotenza è una relazione di equivalenza.**

- **Teorema 9. Sono numerabili: N, P, Z, Q, prodotti (sia finiti sia infiniti) di insiemi numerabili; unioni (sia finite sia infinite) di insiemi non numerabili.**

- **Teorema 10: R non è numerabile (dimostrazione col procedimento della diagonale di Cantor)**

- **Teorema 11: Lemma della Concordia: Supponiamo di avere** $f: X \to Y$ **iniettiva e** $g: Y \to X$ **iniettiva. Allora** $\exists h: X \to Y$ **biunivoca.**

- **Teo 12. (Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein) La cardinalità è una relazione d'ordine, in particolare se ewsiste un'applicazione iniettiva da X in Y e una iniettiva da Y in X allora esiste una funzione biunivoca fra X e Y.**

- **Teorema 13: Teorema di Cantor-Bernstein : un insieme non è mai equipotente al suo insieme delle parti.**

- **Teorema 14: Disuguaglianza di Bernoulli.**

- **Teorema 15: Algoritmo di Erone per il calcolo di** $\sqrt{x}$

- **Teorema 16: Principio Fondamentale del Calcolo Combinatorio**

- **Teorema 17: Permutazioni semplici e con ripetizione**

- **Teorema 18. Disposizioni semplici e con ripetizione**

- **Teorema 19. Combinazioni semplici**

- **Teorema 20.** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ **e** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

- **Teorema 21. Sviluppo del binomio di Newton**

- **Teorema 22.** $C_{n,k}^{r} = \binom{n+k-1}{k}$

- **Teorema 23. Formula di De Moivre**

- **Teorema 24. Radici n-esime**

- **Teorema 25. Radici n-esime dell'unità**

- **Teorema 26: Teorema fondamentale sulle successioni monotone: Ogni successione monotona è regolare.**

- **Teorema 27. I teoremi con le operazioni aritmetiche.**

- **Teorema 28: Teorema del prodotto di una successione limitata per una infinitesima.**

- **Teorema 29: Applicazione del Teorema Fondamentale sulle Successioni Monotone: convergenza al numero "e" delle successioni**
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ con $a_n \to +\infty$, $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ con $a_n \to -\infty$. **Convergenza ad exp(x) della successione** $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

- **Teorema 30: Teorema della permanenza del segno. Corollario 1. Corollario 2.**

- **Teorema 31: Teorema dei Carabinieri.**

- **Teorema 32: Principio di sostituzione degli infinitesimi**

- **Teorema 33: Principio di sostituzione degli infiniti**

- **Teorema 34. lim a^n;**

- **Teorema 35. lim** $\sqrt[n]{a}$,

- **Teorema 36. lim** $\sqrt[n]{n^\alpha}$ **;**

- **Teorema 37. lim sen a_n, con a_n infinitesima;**

- **Teorema 38. lim cos a_n, con a_n infinitesima;**
- **Teorema 39. lim** $\frac{sen\, a_n}{a_n}$ **, con a_n infinitesima;**
- **Teorema 40. lim** $\frac{1-\cos a_n}{a_n}$ **con a_n infinitesima;**
- **Teorema 41. lim** $\frac{1-\cos a_n}{a_n^2}$ **, con a_n infinitesima.**
- **Teorema 42: Criterio del rapporto: Se $a_n>0$ e lim $a_{n+1}/a_n <1$, allora lim $a_n =0$.**

- **Teorema 43. Infiniti di ordine crescente: ord(**$n^b) < ord(a^n) < ord(n!) < ord(n^n)$

- **Teorema 44: Il Teorema di Bolzano-Weierstrass: Ogni successione ammette sempre un'estratta regolare.**

- **Teorema 45: Una successione è di Cauchy sse è convergente.**

- **Teorema 46: Caratterizzazione di maxlim e minlim.**
-

ELENCO DELLE DOMANDE CHE VERRANNO ESTRATTE NELL'ESAME ORALE RIGUARDANTI LA SECONDA PARTE DEL CORSO

(da pag. 141 a pag. 445 del libro di testo)

- **Teorema 47: Teorema Ponte**
- **Teorema 48: Operazioni con i limiti di funzioni.**
- **Teorema 49. Tutte le funzioni elementari sono continue nei loro domini di definizione.**
- **Teorema 50 della permanenza del segno per funzioni continue.**
- **Teorema 51 di Esistenza degli Zeri.**
- **Teorema 52: Applicazione del Teorema di Esistenza degli Zeri all'esistenza di punti antipodali con la stessa temperatura.**
- **Teorema 53: Primo teorema dell'esistenza dei valori intermedi**
- **Teorema 54: Teorema di Weierstrass**
- **Teorema 55: Secondo Teorema dell'esistenza dei valori intermedi.**
- **Teorema 56: Criterio di invertibilità**
- **Teorema 57: Teorema sul limite delle funzioni monotòne.**
- **Teorema 58: Criterio di continuità per le funzioni monotòne**
- **Teorema 59: Teorema di continuità della funzione inversa di una funzione continua**
- **Teorema 60: Significato geometrico della derivata come tangente trigonometrica della retta tangente nel punto.**
- **Teorema 61: L'errore che si commette considerando il valore della retta tangente in un punto invece del valore esatto della funzione è un infinitesimo di ordine superiore all'incremento della variabile indipendente.**
- **Teorema 62: Operazioni aritmetiche con le derivate.**
- **Teorema 63: Teorema di derivazione delle funzioni composte.**
- **Teorema 64: Teorema di derivazione delle funzioni inverse**

- **Teorema 65: Derivate delle funzioni elementari: potenze ad esponente razionale, logaritmi.**

- **Teorema 66: Derivate delle funzioni elementari: continuazione: esponenziali, potenze ad esponente reale.**

- **Teorema 67: Derivate delle funzioni elementari: funzioni sen, cos, tg, arcsen, arccos, arctg. Le funzioni iperboliche e le loro inverse**

- **Teorema 68: Teorema fondamentale della geometria iperbolica: $\cosh^2 x - \text{senh}^2 x = 1$**

- **Teorema 69: Grafici delle funzioni iperboiche senh, cosh, tgh.**

- **Teorema 70: Le funzioni iperboliche inverse: sett senh, sett cosh, sett tgh e i loro grafici**

- **Teorema 71: Primo Teorema di Fermat.**

- **Teorema 72: Secondo Teorema di Fermat.**

- **Teorema 73. Teorema di Rolle**

- **Teorema 75: Criterio di monotonia col segno della derivata prima**

- **Teorema 76: Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo e criterio di stretta monotonìa.**

- **Teorema 77. Criterio di convessità con la derivata seconda.**

- **Teorema 78: Teorema di L'H*ö*pital**

- **Teorema 79: Il Polinomio di Taylor di ordine n coincide col valore della funzione e di tutte le sue derivate fino all'ordine n nel centro della formula.**

- **Teorema 80: Formula di Taylor con il resto di Peano: R_n è un infinitesimo di ordine superiore ad n per $x \to x_o$.**

- **Teorema 81: Formula di Taylor con il resto di Lagrange: $R_n = f^{(n+1)}(c)\frac{(x-x_o)^{n+1}}{(n+1)!}$**

- **Teorema 82: Polinomio di Taylor di exp(x)**

- **Teorema 83: Polinomio di Taylor di log(1 + x)**

- **Teorema 84: Polinomio di Taylor di senx**

- **Teorema 85: Polinomio di Taylor di cosx**

- **Teorema 86: Polinomio di Taylor di $(1+x)^{\alpha}$**

- **Teorema 87: Teorema Fondamentale sulle Partizioni: Sia f([a,b]) = [m,M]. Allora, per ogni coppia di partizioni P e Q di [a,b] si ha $M(b-a) \leq s(f,P) \leq S(f,Q) \leq M(b-a)$**

-

- **Teorema 88. Teorema di Riemann sulla integrabilità con le partizioni: Una funzione f limitata su [a, b] è ivi integrabile secondo Riemann se e solo se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ una partizione P di [a, b] tale che $s(f,P) - S(f,P) < \varepsilon$.**

- **Teorema 89.Teorema di Riemann sull'integrabilità delle funzioni monotone: Ogni funzione monotona è integrabile su [a, b]**

- **Teorema 90. Teorema di Cantor sull'uniforme continuità: Ogni funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato è uniformemente continua**

- **Teorema 91. TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE**

- **Teorema 92.FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE**

- **Teorema 93. Formula di integrazione per parti**

- **Teorema 94. Formula di integrazione per sostituzione**

- **Teorema 95. Formula del salame (solidi di rotazione attorno all'asse delle x)**

- **Teorema 96. Formula della carta igienica (solidi di rotazione attorno all'asse delle y)**

- **Teorema 97. Il termine generale di una serie convergente è infinitesimo.**

- **Teorema 98. Il carattere di una serie non cambia modificando un numero finito di termini.**

- **Teorema 99: Criterio di Cauchy per le serie.**

- **Teorema 100. Criteri di confronto. Criterio di condensazione**

- **Teorema 101: Criterio della radice**

- **Teorema 102: Criterio del rapporto**

- **Teorema 103: Criterio di Leibnitz per le serie a segno alterno.**

- **Teorema 104. Equazioni differenziali lineari del I^o ordine**

- **Teorema 105: Equazioni differenziali di Bernoulli**

- **Teorema 106. Equazioni a variabili separabili**

ECCO ORA UN PAIO DI PROVE SCRITTE CHE SONO STATE DATE NELL'A.A. 2018/19.

Prof. Giuseppe Marino
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 DEL_____
Da completare in max 2 h
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E CORSO DI LAUREA IN FISICA
A.A. 2018/19
SCRIVERE STAMPATELLO MAIUSCOLO

COGNOME_____NOME_____MATR._____

Esercizio 1. (3 punti) Sia data la funzione f definita da $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$. Determinare:
(a) Dom(f); (b) Dom(f'); (c) f'

Esercizio 2 (3 punti) Calcolare, se esiste, il seguente limite $\lim_{x \to -\infty} \frac{2senx+x-lg^3x^2}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$

Esercizio 3 (12 punti) Studiare la funzione definita da $f(x) = arcsen\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ e tracciarne il grafico DM133

Esercizio 4 (3 punti) Studiare il carattere della serie $\sum_1^\infty (-1)^n sen\frac{2n}{3n^2+1}$

Esercizio 5 (3 punti) Determinare il volume del solido di rotazione generato dalla rotazione della regione che si trova alla destra dell'asse y e alla sinistra della curva $x = 2y - y^2$ attorno all'asse y

Esercizio 6 (3 punti) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 8xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Esercizio 7 (3 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x, y = x^3 + y^3 + xy$

Prof. Giuseppe Marino
PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 1 DEL_____
Da completare in max 2 h
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA E CORSO DI LAUREA IN FISICA
A.A. 2018/19
SCRIVERE STAMPATELLO MAIUSCOLO

COGNOME_____NOME_____MATR._____

Esercizio 1. (3 punti) Scrivere il rapporto incrementale della funzione $f(x) = \frac{7x^3+5x-3}{x-1}$ nel punto $x = 3$ con incremento $h/22$

Esercizio 2 (3 punti) Calcolare, se esiste, il seguente limite $\lim_{x\to-\infty} \frac{2senx+ x^2-lg^3x^2}{-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}$

Esercizio 3 (12 punti) Studiare la funzione definita da $f(x) = \sqrt{x^2 - |x-1|}$ e tracciarne il grafico

Esercizio 4 (3 punti) Studiare il carattere della serie $\sum_1^\infty \left(1 - cos\frac{4}{5n}\right)$

Esercizio 5 (3 punti) Determinare il volume di una tazza ottenuta dalla rotazione attorno all'asse y dell'arco parabolico $y = x^2$ con x in [0, 1]

Esercizio 6 (3 punti) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{x}{x^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Esercizio 7 (3 punti) Determinare la natura dei punti critici della funzione $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$